Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Abr-Jul 2016
Turno: 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (6 pts.) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) - 1 & \text{, si x} < 0 \\ x^2 & \text{, si x} \geq 0 \end{cases}$$

halle $f'(0)$ y $f''(0)$.

2. (5 pts.) Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\text{arcsen}(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$$

3. (4 pts.) Si y está definida implícitamente en terminos de x mediante la ecuación $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$, halle $\dfrac{dy}{dx}$.

4. (10 pts.) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 4}{2x^2}$, halle:
   (a) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas);
   (b) Puntos críticos;
   (c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento;
   (d) Intervalos de concavidad;
   (e) Puntos de inflexión;

5. (4 pts.) Haga el bosquejo de una función, continua y derivable en todo su dominio, que cumpla con las siguientes condiciones:
   - Posee asíntota horizontal $y = 2$ cuando x tiende a $-\infty$;
   - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$;
   - Posee asíntota oblicua $y = x + 2$ cuando x tiene a ∞;
   - Es creciente en $(-4, -2)$ y en $(0, \infty)$;
   - Es decreciente en $(-\infty, -4)$ y en $(-2, 0)$;
   - Posee un máximo local en el punto $A(-2, 4)$ y un mínimo local en el punto $B(-4, 0)$;
   - Es cóncava hacia arriba en $(-5, -3)$;
   - Es cóncava hacia abaja en $(-\infty, -5)$, en $(-3, 0)$ y en $(0, \infty)$;
   - Posee puntos de inflexión en los puntos $C(-5, 1)$ y $D(-3, 2)$;

6. (6 pts.) Determine las dimensiones del rectángulo (cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados) de mayor área inscrito en el circulo de radio 1 (centrado en el origen).

Solución:

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) - 1 & \text{, si x} < 0 \\ x^2 & \text{, si x} \geq 0 \end{cases}$$

halle $f'(0)$ y $f''(0)$.

Como tenemos una función a trozos que se separa en $x = 0$, debemos derivar usando la definición.

Por la izquierda:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(x+h) - 1 - (\cos(x) - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\text{Límite notable}} - \sin(x) \underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(h)}{h}}_{\text{Límite notable}} \\
&= \cos(x)(0) - \sin(x)(1) \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

Por la derecha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h(2x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} 2x + h \\
&= 2x + 0 \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Evaluamos ambas derivadas en $x = 0$:

$$f'(0)^- = -\sin(0) = 0 \qquad\qquad f'(0)^+ = 2(0) = 0$$

Como ambas derivadas son iguales, tenemos que $f'(0)$ existe y es igual a 0.

Para hallar $f''(0)$ usamos el mismo procedimiento:

Por la izquierda:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^-} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\sin(x+h) - (-\sin(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\sin(x)\cos(h) - \cos(x)\sin(h) + \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(x)(1 - \cos(h)) - \cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(x)(1 - \cos(h))}{h} - \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x) \underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{(1 - \cos(h))}{h}}_{\text{Límite notable}} - \cos(x) \underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(h)}{h}}_{\text{Límite notable}} \\
&= -\sin(x)(0) - \cos(x)(1) \\
&= -\cos(x)
\end{aligned}$$

Por la derecha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2(x+h) - 2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2x + 2h - 2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Evaluamos ambas derivadas en $x = 0$:

$$f''(0)^{-} = -\cos(0) = 1 \qquad\qquad f''(0)^{+} = 2$$

Como ambas derivadas son distintas, $f''(0)$ no está definido.

---

2. Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\text{arcsen}(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)\text{arcsen}(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}\right)' \\
&= \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)\text{arcsen}(\sqrt{x})\right)' + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}\right)' \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)'\text{arcsen}(\sqrt{x}) + \left(x - \frac{1}{2}\right)(\text{arcsen}(\sqrt{x}))' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\right)\Big(1 - 2x\Big) \\
&= \text{arcsen}(\sqrt{x}) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1 - 2x}{4\sqrt{x - x^2}} \\
&= \text{arcsen}(\sqrt{x}) + \left(\frac{2x - 1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\right) + \frac{1 - 2x}{4\sqrt{x - x^2}} \\
&= \text{arcsen}(\sqrt{x}) + \left(-\frac{1 - 2x}{4\sqrt{x - x^2}}\right) + \frac{1 - 2x}{4\sqrt{x - x^2}} \\
&= \text{arcsen}(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

---

3. Si y está definida implícitamente en terminos de x mediante la ecuación $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$, halle $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned}
(y + \cos(xy^2) + 3x^2)' = (4)' &\Rightarrow y' - \sin(xy^2)(y^2 + 2xyy') + 6x = 0 \\
&\Rightarrow y' - y^2\sin(xy^2) - 2xyy'\sin(xy^2) = -6x \\
&\Rightarrow y'(1 - 2xy\sin(xy^2)) = y^2\sin(xy^2) - 6x \\
&\Rightarrow y' = \frac{y^2\sin(xy^2) - 6x}{1 - 2xy\sin(xy^2)}
\end{aligned}$$

---

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 4}{2x^2}$, halle:

- Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas);

  ∘ Para hallar las asíntotas verticales, analizamos el límite de la función cuando ésta se acerca a un x que anula el denominador. En este caso, $x = 0$ asi que si los límites laterales tienden a ∞ o $-\infty$ en dicha x, hay una asíntota vertical en dicho punto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x^2+4}{2x^2} = \frac{0^3+0^2+4}{2(0)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x^2+4}{2x^2} = \frac{0^3+0^2+4}{2(0)^2} = \frac{4}{0^-} = \infty$$

Entonces hay una asíntota vertical $x = 0$.

∘ Para hallar las asíntotas horizontales, comprabamos si el límite de la función cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$ tienden a un valor.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+4}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}{\frac{2}{x}} = \frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}}+\cancelto{0}{\frac{4}{\infty^3}}}{\cancelto{0^+}{\frac{4}{\infty^3}}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+4}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}{\frac{2}{x}} = \frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{-\infty}}+\cancelto{0}{\frac{4}{-\infty^3}}}{\cancelto{0^-}{\frac{4}{-\infty^3}}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Como ambos tienden a infinito, tenemos que **la función no tiene asíntotas horizontales**. (Nota: Podíamos determinar que la función no tenía asíntotas horizontales al notar que el grado del numerador es uno más que el del denominador).

∘ Para hallar las asíntotas oblícuas, tenemos que la pendiente de la asíntota viene dada por:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+x^2+4}{2x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+4}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}{2} = \frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}}+\cancelto{0}{\frac{4}{\infty^3}}}{2} = \frac{1}{2}$$

Para hallar el punto de corte con el eje y:

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+4}{2x^2} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}+x^2+4-\cancel{x^3}}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{4}{x^2}}{2} = \frac{1+\cancelto{0}{\frac{4}{\infty^2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

Si evaluamos cuando $x \to -\infty$, tendremos el mismo resultado (pues el resultado tanto de la pendiente como de la intersección con el eje y no dependen del signo de los ceros), por lo tanto **la función tiene una asíntota oblícua de la forma** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

- Puntos críticos;

La función no tiene puntos fronterizos, pues está definido $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, y no en un intérvalo.

Derivamos la función una vez para conseguir puntos estacionarios y singulares.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^3+x^2+4}{2x^2}\right)' \\
&= \frac{(x^3+x^2+4)'(2x^2)-(x^3+x^2+4)(2x^2)'}{(2x^2)^2} \\
&= \frac{(3x^2+2x)(2x^2)-(x^3+x^2+4)(4x)}{4x^4} \\
&= \frac{6x^4+4x^3-4x^4-4x^3-16x}{4x^4} \\
&= \frac{2x^4-16x}{4x^4} \\
&= \frac{2x(x^3-8)}{4x^4} \\
&= \frac{x^3-8}{2x^3}
\end{aligned}
$$

Para hallar puntos estacionarios, igualamos el denominador a 0:

$$x^3-8=0 \Rightarrow x=2$$

Entonces hay un punto estacionario cuando $x=2$.

Notamos que la $f'(x)$ no está definida en $x=0$, entonces tiene un punto singular cuando $x=0$.

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento;

  Sabemos, por el requisito anterior que el punto de corte de la derivada de la función es cuando $x=2, x=0$, entonces hacemos cementerio de casos:

	$(-\infty,0)$	$(0,2]$	$[2,\infty)$
x^3-8	$-$	$-$	$+$
$2x^3$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

  Entonces la función es decreciente $\forall x \in (0,2]$ y creciente $\forall x \in (-\infty,0)\cup[2,\infty)$.

- Intervalos de concavidad;

  Para hallar la concavidad debemos hallar $f''(x)$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{x^3-8}{2x^3}\right)' \\
&= \frac{(x^3-8)'(2x^3)-(x^3-8)(2x^3)'}{(2x^3)^2} \\
&= \frac{(3x^2)(2x^3)-(x^3-8)(6x^2)}{4x^6} \\
&= \frac{\cancel{6x^5}-\cancel{6x^5}+48x^2}{4x^6} \\
&= \frac{12}{x^4}
\end{aligned}
$$

Notamos que la derivada segunda SIEMPRE es positiva. Entonces la función es concava hacia arriba en todo su dominio.

- Puntos de inflexión;

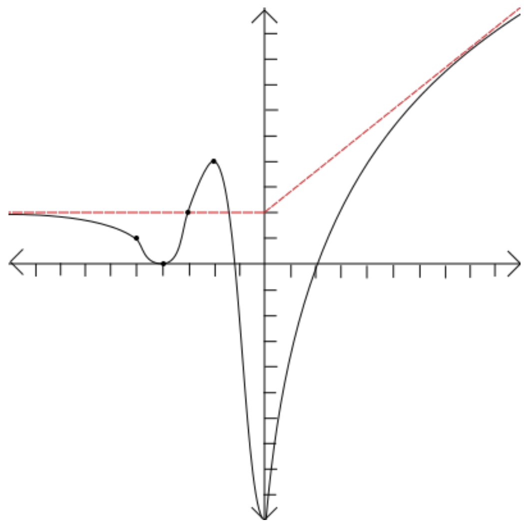
  Como la derivada segunda jamás se hace 0, entonces la función no tiene puntos de inflexión.

---

5. Haga el bosquejo de una función, continua y derivable en todo su dominio, que cumpla con las siguientes condiciones:

- Posee asíntota horizontal $y = 2$ cuando x tiende a $-\infty$;
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$;
- Posee asíntota oblicua $y = x + 2$ cuando x tiene a ∞;
- Es creciente en $(-4, -2)$ y en $(0, \infty)$;
- Es decreciente en $(-\infty, -4)$ y en $(-2, 0)$;
- Posee un máximo local en el punto $A(-2, 4)$ y un mínimo local en el punto $B(-4, 0)$;
- Es cóncava hacia arriba en $(-5, -3)$;
- Es cóncava hacia abaja en $(-\infty, -5)$, en $(-3, 0)$ y en $(0, \infty)$;
- Posee puntos de inflexión en los puntos $C(-5, 1)$ y $D(-3, 2)$;

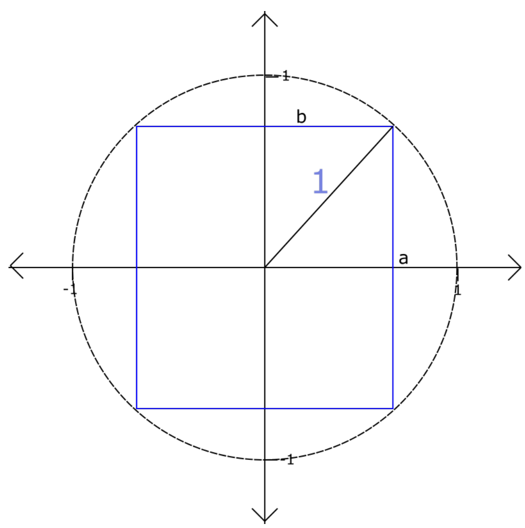
Una posible gráfica sería:



---

6. Determine las dimensiones del rectángulo (cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados) de mayor área inscrito en el circulo de radio 1 (centrado en el origen).

Dibujamos el problema para visualizarlo mejor:



Sea a, b, la longitud de los lados de un rectángulo. El área de un rectángulo viene dada por:

$$A = ab$$

Dado que el rectángulo está centrado en un circulo, su diagonal será el diametro del círculo. Sabemos que la diagonal de un rectángulo viene dada por el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como la diagonal viene dada por el diametro (diametro = 2r = 2), sustituimos:

$$2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Despejando, tenemos que:

$$a = \sqrt{4 - b^2}$$

Sustituyendo en la fórmula de area:

$$A = (\sqrt{4 - b^2})b$$

Ahora derivamos con respecto a b para hallar el área máxima:

$$\begin{aligned} A' = (b\sqrt{4-b^2})' = \left(\sqrt{4-b^2}\right)' b + \left(\sqrt{4-b^2}\right) b' = \left(\frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}\sqrt{4-b^2}}\right) b + \sqrt{4-b^2} \\ = \frac{-b^2}{\sqrt{4-b^2}} + \frac{4-b^2}{\sqrt{4-b^2}} = \frac{4-2b^2}{\sqrt{4-b^2}} = \frac{2(2-b^2)}{\sqrt{4-b^2}} \end{aligned}$$

Notamos que la derivada se anula cuando $b = \pm\sqrt{2}$. Como los lados deben ser positivos (pues un rectángulo con lados negativos no tiene sentido), tenemos que el área es máxima cuando $b = \sqrt{2}$.
Para hallar el valor del lado a, sustituimos en la ecuación de la diagonal:

$$2 = \sqrt{a^2 + \sqrt{2}^2} \quad \Rightarrow \quad 4 = a^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$$

Entonces el rectángulo con mayor área inscrito en un circulo de radio 1 es un cuadrado con lados de longitud $\sqrt{2}$.

Este material fue digitalizado por Jean Franco Gómez para GUIAS USB.

Jean Franco Gómez

15-10581

Ingeniería de la Computación

Twitter: @JeanFranGo

gecousb.com.ve

Twitter: @gecousb

Instagram: gecousb